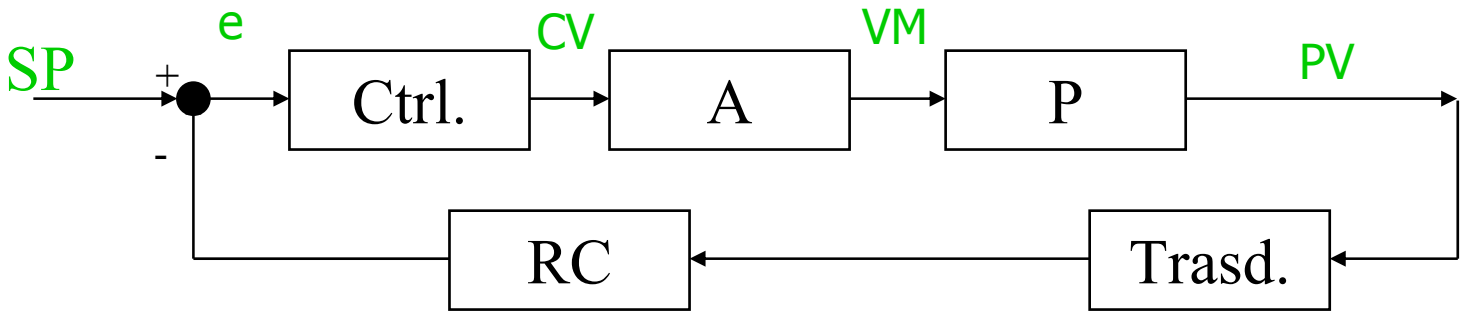
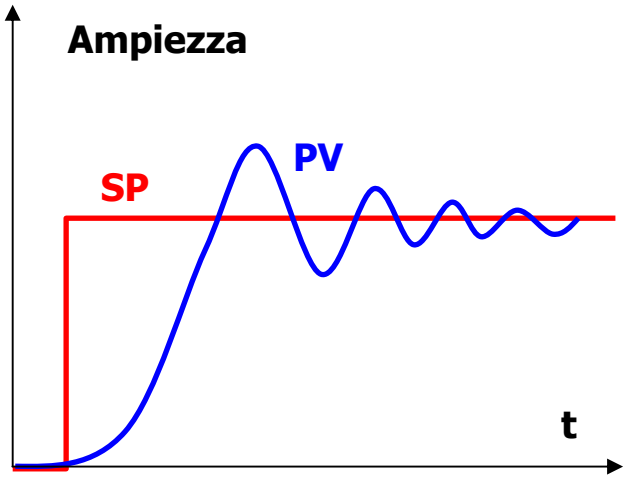
ALGORITMI DI CONTROLLO

ALGORITMI DI CONTROLLO - INTRODUZIONE



- **Algoritmo di controllo** = principio di funzionamento del controllore
- **Processo** = dato del problema. Importante conoscerlo
- **Minimizzazione** scarto tra SP e PV ⇒ (e dipendenza da variabili ambientali)
- **Oscillazioni** legate alla rapidità di risposta a variazioni del SP ⇒ minimizzazione del **transitorio**
- **Sovraelongazioni** ⇒ limitarne ampiezza
- **Stabilità** (no oscillazioni infinite o divergenti)
- **Ritardi**



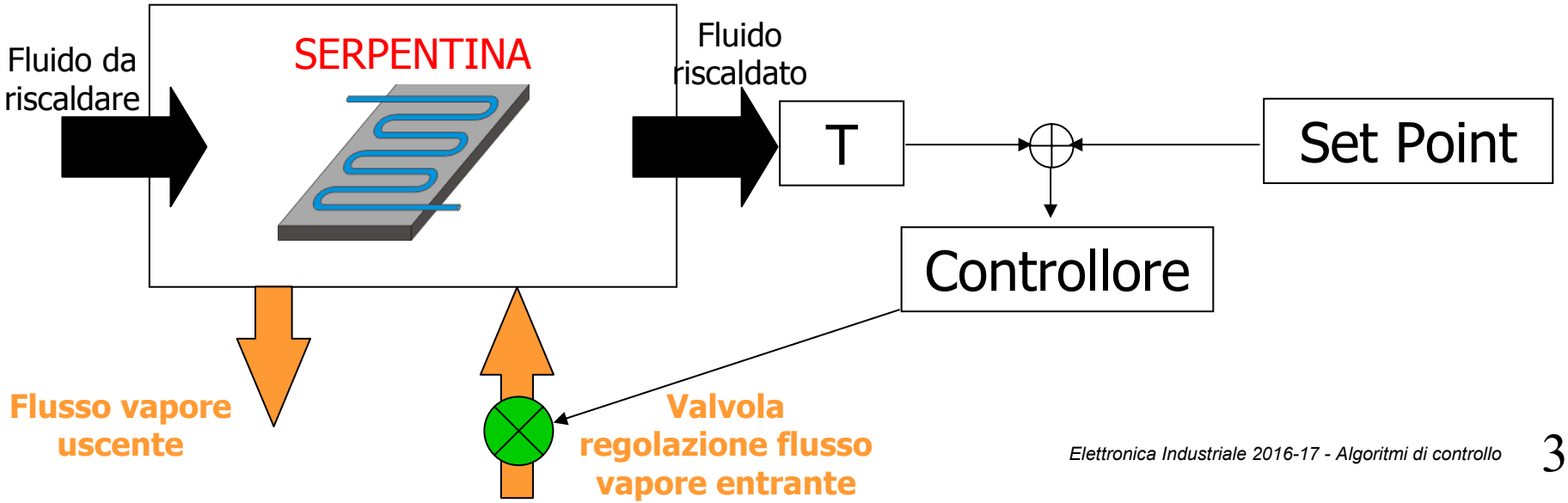
CONTROLLO ON OFF

ESEMPIO (scambiatore di calore)

- **Vapore inviato su serpentina per scaldarla.**
- **Temperatura letta da trasduttore**
- **Confronto con Set Point**
- **Controllore che regola la valvola di apertura/chiusura ingresso vapore**

METODOLOGIA

- **Fornire al sistema una certa quantità di vapore o bloccare la fornitura**



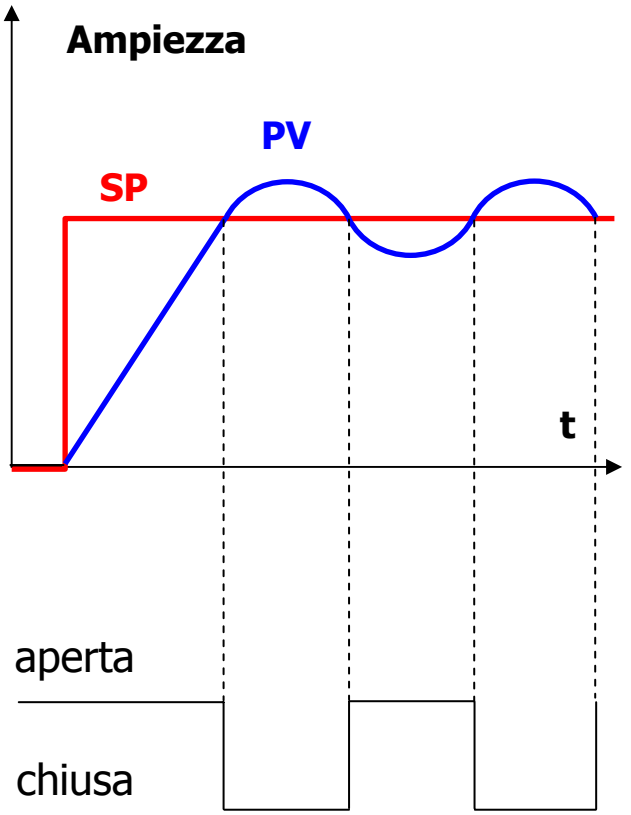
CONTROLLO ON OFF

OSSERVAZIONI

- **SP e PV sono temperature**
- **finché SP>PV valvola aperta per erogare vapore caldo**
- **quando la valvola viene chiusa,T° non scende subito perché all'interno della camera una certa quantità di calore deve ancora propagarsi**
- **successivamente la temperatura scende fino al SP (non subito però), la valvola viene riaperta e così via**

PROBLEMI

- **la temperatura raggiunta per la maggior parte del tempo non è uguale al SP (errore trascurabile?)**
- **continue sollecitazioni alla valvola**
- **relazione con velocità del processo**

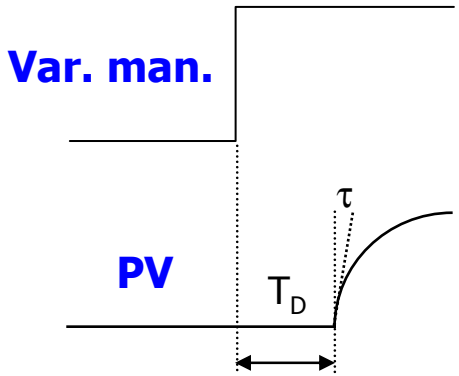


CONTROLLO ON OFF

RAFFINAMENTO MODELLO

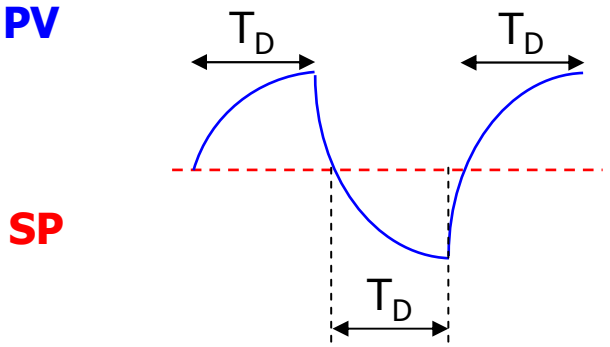
- **Il processo mostra una lentezza a propagare il calore nell'ambiente: funzione di tipo passa basso**
- **Ritardo 'naturale' nel rispondere alla sollecitazione termica**

$$: \frac{e^{-sT_D}}{1+s\tau}$$



RISPOSTA PROCESSO - 1

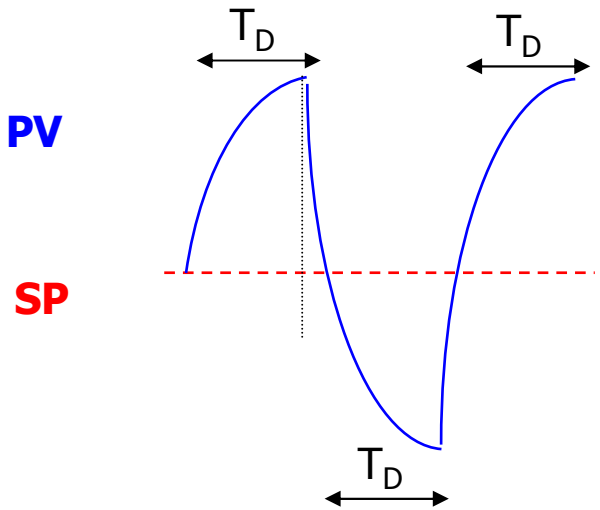
- **tratti di esponenziale crescente o decrescente con ritardo T_D dal SP ultimo raggiunto**
- **Se T_D è piccolo la risposta assume una conformazione "a dente di sega" (e quindi ancora commutazioni frequenti)**



CONTROLLO ON OFF

RISPOSTA PROCESSO - 2

- **Se τ è piccolo, a parità di T_D , si hanno discese e salite più ampie dando alla risposta una caratteristica di tipo oscillatorio. Questo non va bene, anche per via della potenziale ampiezza delle oscillazioni.**



RIASSUMENDO …

- ✓**τ rappresenta un sistema che reagisce prontamente all'ingresso e poi sviluppa la reazione nel tempo**
- ✓**T_D , rappresenta un sistema che subito non reagisce e poi lo fa fortemente: influisce di più sulla stabilità**
- ✓**Se $T_D >> \tau$ oscillazioni ampie ON OFF ko, viceversa ok (piccolissimo ripple).**
- ✓**Per diminuire la frequenza delle commutazioni, controllo con isteresi.**

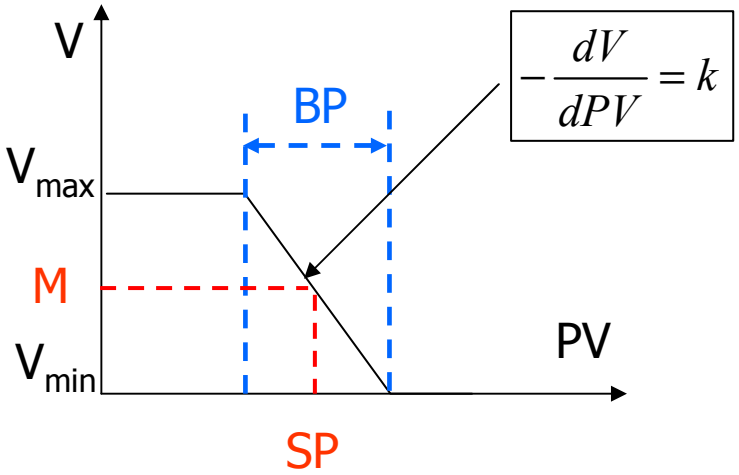
CONTROLLO PROPORZIONALE

Legame lineare tra set point e variabile manipolata

$$V=k[SP-PV] + M$$

M variabile di reset manuale, utilizzata per evitare di non esercitare il controllo in assenza di scarto dal set point.

M=potenza da fornire per mantenere il processo nella condizione voluta.



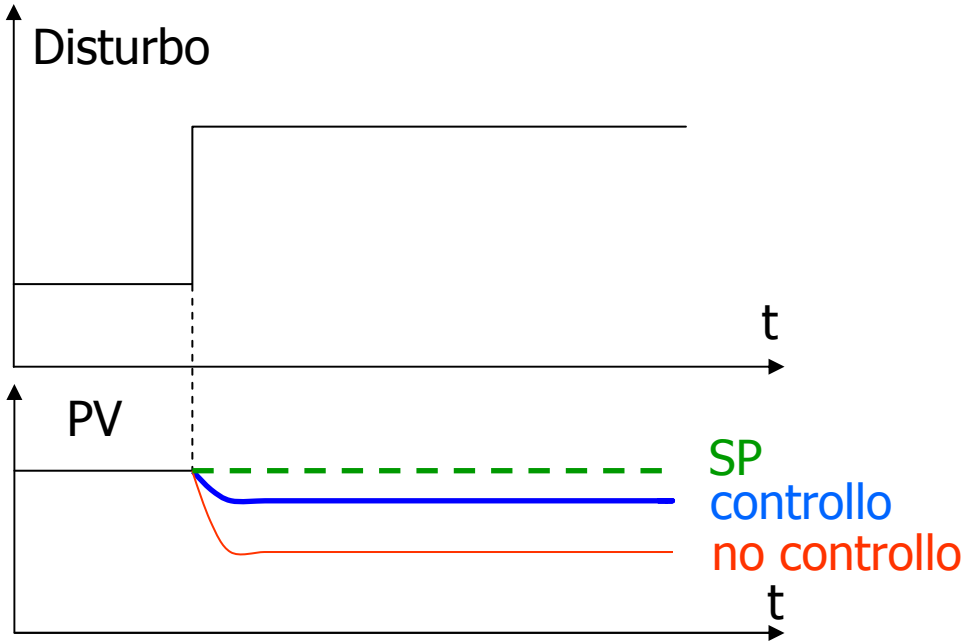
V limitata in quanto 'azione sul processo'

Controllore ad azione limitata in un intorno del set point denominato 'banda di proporzionalità' (BP) = V_{max}/k (V_{max}= max. potenza tollerata dall'attuatore)

se $k \to \infty$, controllore ON-OFF

in generale k non può crescere indefinitamente ed è sufficiente che cambi qualcosa (un disturbo costante) per avere un errore $\neq 0 \Rightarrow$ difficile garantire un errore asintotico nullo.

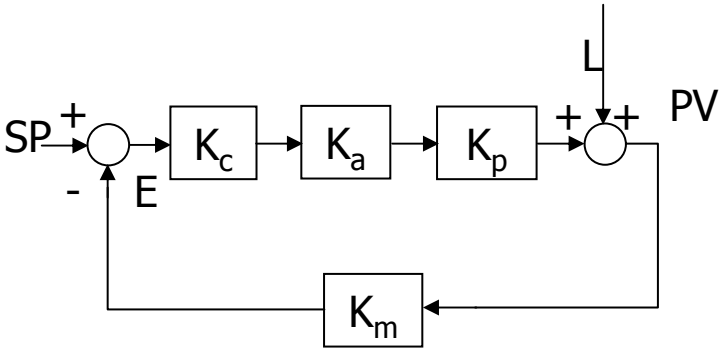
CONTROLLO PROPORZIONALE



Esempio di controllo proporzionale ad anello aperto con presenza di disturbo a gradino.

Risposta della PV in presenza di controllo e senza.

$$PV = \frac{L}{1 + K_p K_a K_m K_c}$$



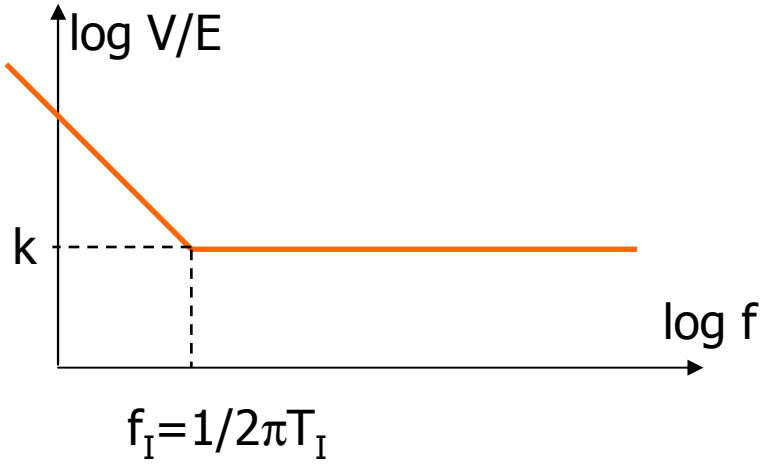
Se SP=0, PV si annulla solo se L=0 (no disturbo) o se $1+K_pK_aK_mK_c \to \infty$ (ma questo può portare a instabilità). Meglio se il guadagno è < 1, però in tal caso PV non si azzera mai.

CONTROLLO PROPORZIONALE-INTEGRALE

In un controllo proporzionale, se il disturbo su di un processo è continuo non riusciamo mai ad azzerarlo a meno di non intervenire sul termine M. Un modo di automatizzare questo intervento è di introdurre un termine integrale.

L'integrazione dell'errore E costituisce una memoria temporale che influenza la variabile manipolata. Questo termine supplisce le funzioni del reset manuale.

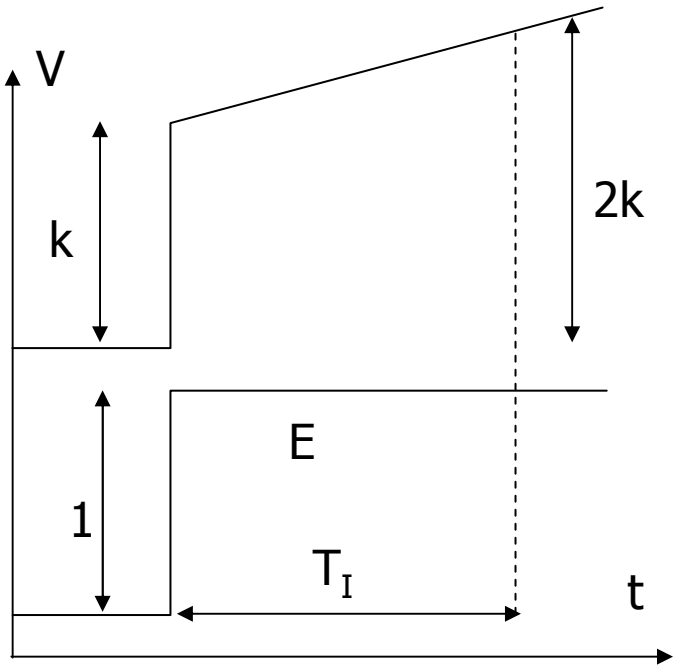
$$V = k[SP - PV] + k' \int_{t0}^{t} [SP - PV]\,dt = k\left[E + \frac{1}{T_I}\int_{t0}^{t} E\,dt\right] \qquad T_I = \frac{k}{k'}\ (\text{tempo di reset})$$



$$V(s) = kE(s)\frac{1}{sT_I}\left(1 + sT_I\right)$$

Alle alte frequenze il termine integrale non esercita alcuna influenza. Eventuale problema se il processo fosse di tipo derivativo.

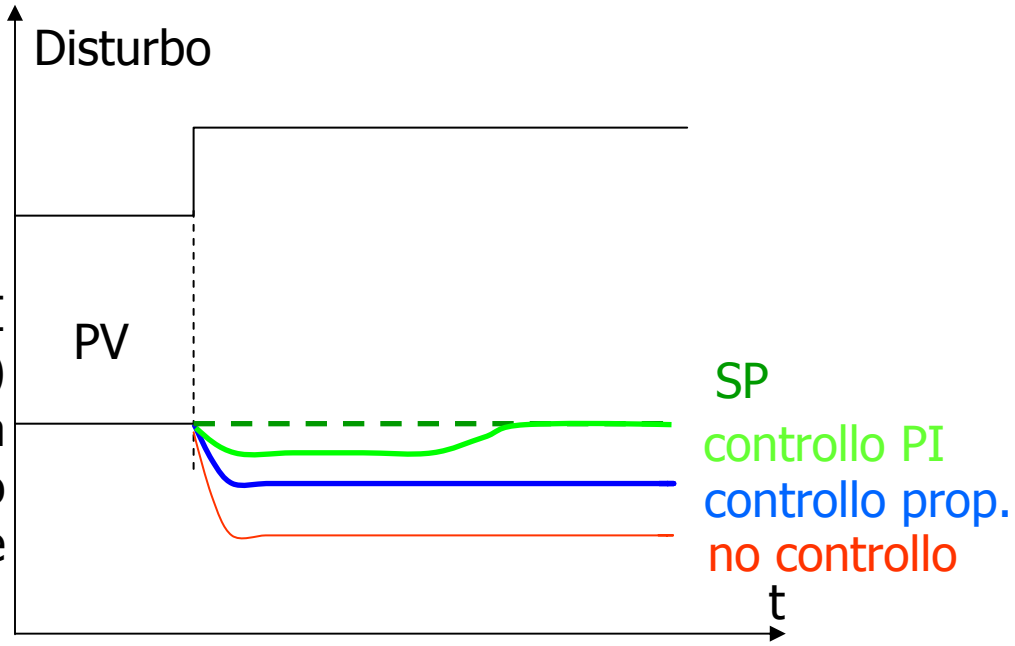
CONTROLLO PROPORZIONALE-INTEGRALE



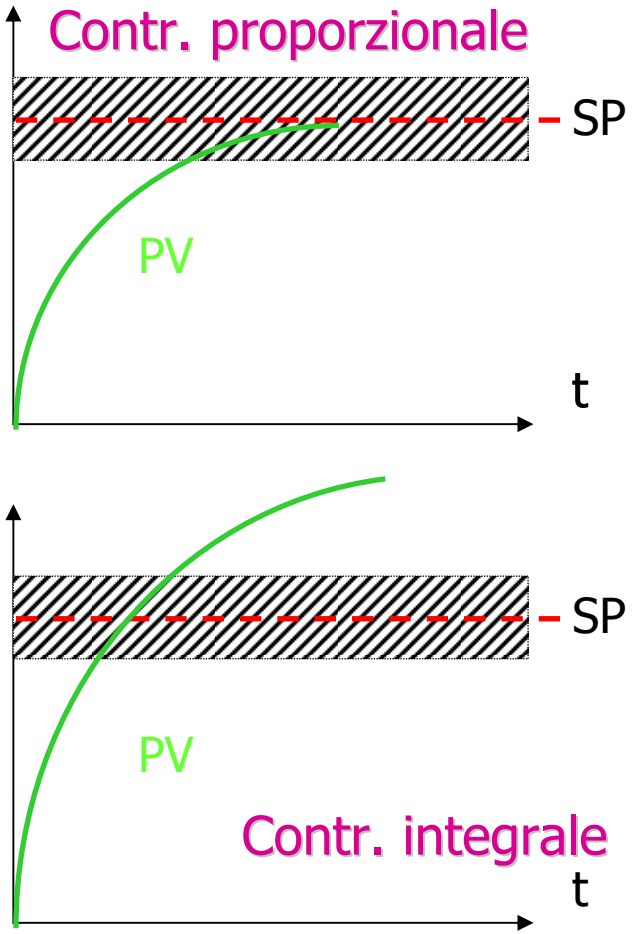
Andamento nel tempo del controllore in risposta ad un disturbo di tipo "a gradino".

Il termine integrale raggiungerà l'intensità di quello proporzionale dopo T_I istanti di tempo. L'intervento del termine integrale sarà dunque tanto più lento quanto maggiore è T_I .

A regime il guadagno del controllore PI tende a ∞ (a differenza di quello prop.) consentendo di annullare l'errore, senza problemi di stabilità (i poli del processo sono di solito a $f>f_I$ dove il guadagno è costante)



FORTI VARIAZIONI DEL SET POINT O START UP



Con un controllo proporzionale all'atto dell'accensione la PV cresce con la massima potenza che viene applicata fino a quando non ci si trova all'interno della BP.

Entro BP la pendenza diminuisce man mano che ci si avvicina a SP.

Con un controllo PI, per t=0 possiamo dimenticare l'esistenza di un termine integrale e considerare applicata la massima potenza.

Avvicinandosi alla BP il termine integrale comincia ad avere un peso, e maggiore è il tempo tra l'istante iniziale e la penetrazione in BP, maggiormente conta il contributo PI al punto che può far 'uscire' dalla BP. Meglio usare tecniche numeriche.

Inoltre in caso di variazioni transitorie brevi del SP, l'effetto di un errore E si fa sentire a lungo, per effetto della componente 'lenta' legata all'integrale.

CONTROLLO PROP. INTEGRALE DERIVATIVO

La derivata dell'errore permette di 'anticipare il controllo' irrobustendolo, cioè aggiungendo un contributo che consenta una risposta molto più veloce di quella integrale che fa sentire la propria azione solo nel tempo, attraverso un peso opportuno che non lo riduca o esalti in maniera eccessiva.

Se, tuttavia, usassimo un'espressione del genere:

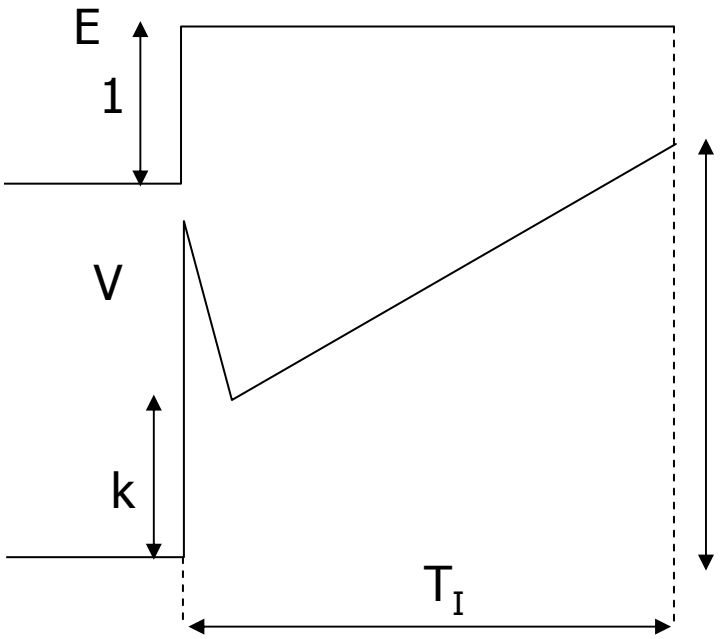
$$V = k\left[E + \frac{1}{T_I}\int_{t0}^{t} E\,dt + T_D\frac{dE}{dt}\right] \overset{\text{Laplace}}{\Rightarrow} \quad kE\left[1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right] \text{ che diverge per } s \to \infty$$

Per limitare il guadagno si introduce un filtro passa basso.

$$V = kE\left[1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1+sT_F}\right] \text{ oppure } \quad V = \frac{kE\left[1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right]}{1+sT_F}$$

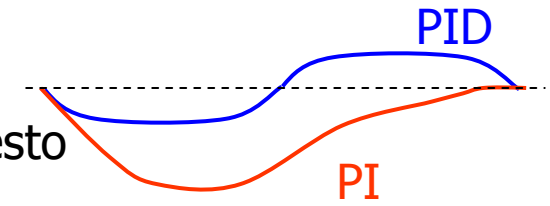
Questo controllore è definito PID. Le 3 costanti di tempo T_D, T_I, T_F sono diverse (media, lunga, breve) e quindi non interagiscono tra loro, da qui il nome "PID non interattivo".

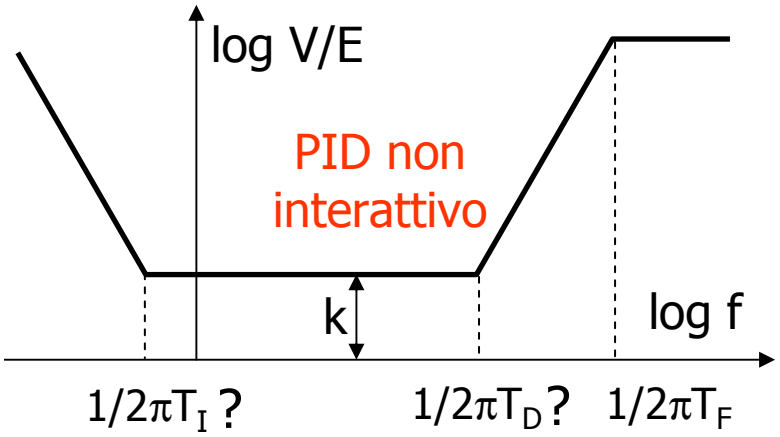
PID NON INTERATTIVO



Nell'ipotesi che l'errore E sia ancora a gradino con ampiezza unitaria, l'uscita inizialmente presenta una δ di Dirac con area kT_D che 'sente' il transitorio. Successivamente evolve come in precedenza.

Nel tempo si presenterà un errore inferiore dovuto al rapido controllo del derivatore. In seguito, questo può portare ad oscillazioni.



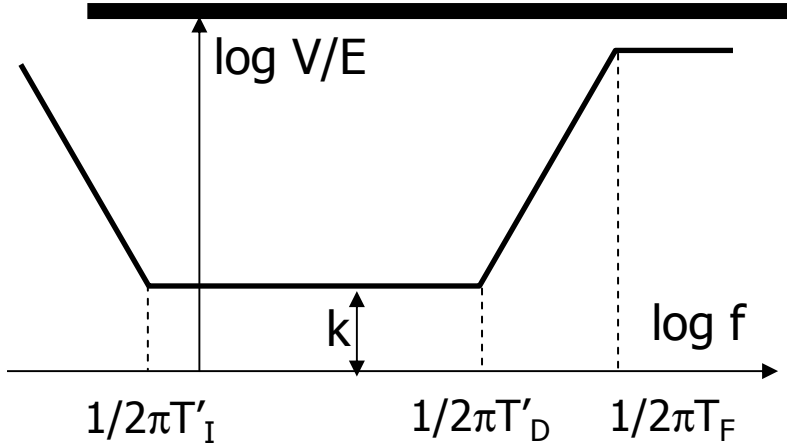


Possibile instabilità (2 poli) $\Rightarrow$ adattamento alle caratteristiche del processo: difficile anche perché cambiano nel tempo.

Adattamento *empirico* dei parametri k, T_I, T_D, T_F alle caratteristiche del processo

$$V = \frac{kE\left[1+\frac{1}{sT_I}+sT_D\right]}{1+sT_F}$$

PID INTERATTIVO



L'espressione precedente può essere trasformata in un'altra equivalente detta PID interattivo (più comoda per compensare poli e zeri).

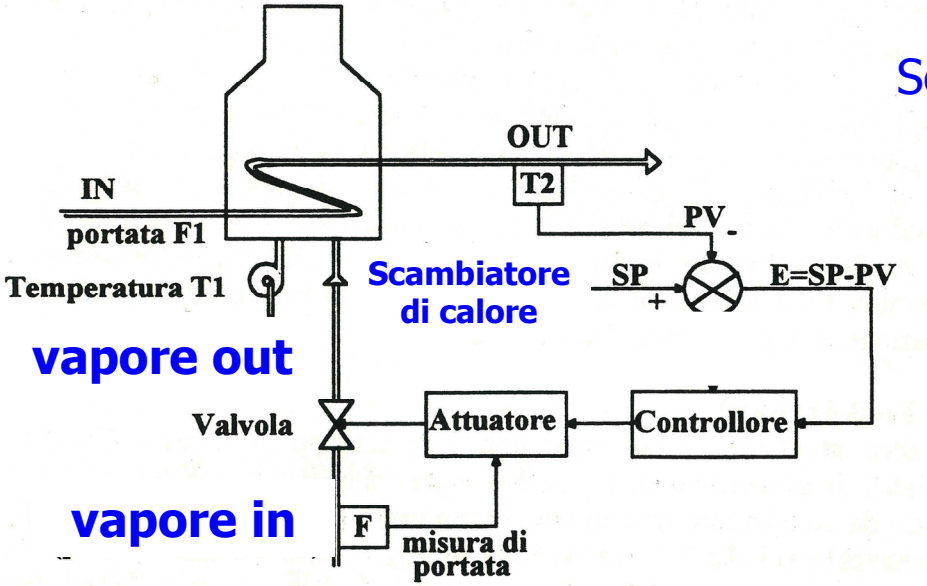
$$V = \frac{k'E\left(1+sT_I'\right)\left(1+sT_D'\right)}{sT_I'\left(1+sT_F\right)}$$

$$V = \frac{E}{1+sT_F}\left[\frac{k'}{sT_I'} + k' + k'\frac{T_D'}{T_I'} + k'sT_D'\right] = \frac{Ek'\left(1+T_D'/T_I'\right)}{1+sT_F}\left[\frac{1}{sT_I'\left(1+T_D'/T_I'\right)} + \frac{sT_D'}{\left(1+T_D'/T_I'\right)} + 1\right]$$

Le due espressioni si equivalgono ponendo: $q=1+T'_D/\,T'_I$, $k=k'q$, $T_I=T'_Iq$, $T_D=T'_D/q$ e nel caso q=1 diventano perfettamente uguali. q tende a 1 se $T'_D<<T'_I$ ragionevole perché uno sta ad alta frequenza e l'altro a bassa. L'espressione evidenzia gli zeri del controllore semplificando l'adattamento al processo.

Il PID diventa non applicabile nel caso in cui il processo presenti molti poli o ritardi: in questi casi si può pensare di usare un 'controllo a cascata'.

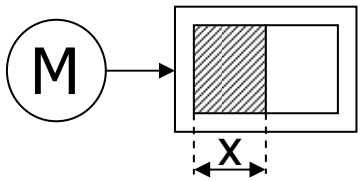
CONTROLLO IN CASCATA



Separare il controllo delle costanti di tempo

La valvola che regola l'entrata del vapore, è una 'saracinesca' che spostandosi lascia una luce variabile cui corrisponde un flusso variabile.

Il controllo della posizione è realizzato con un motore in corrente continua.

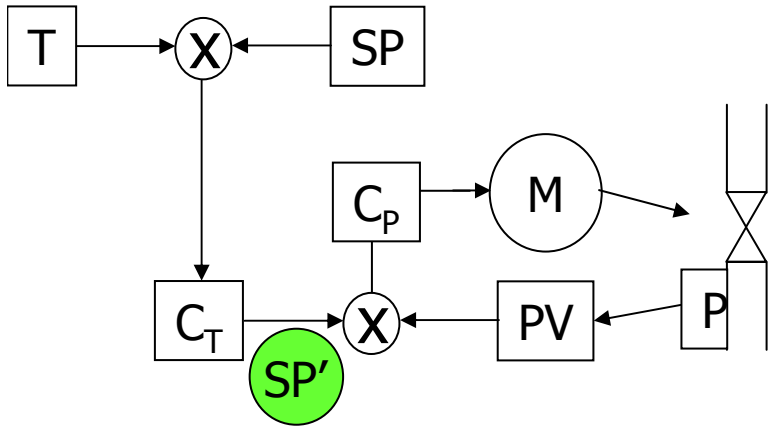


$$x = c\int V dt$$

La relazione tra posizione e tensione di controllo del motore è dovuta all'attuatore (vel. lineare della valvola $\propto \omega$ del motore) ed è di tipo integrale.

Nel processo ci sono altre fonti di ritardo e un altro polo $\Rightarrow$ non conviene usare PID.

CONTROLLO IN CASCATA



Spezziamo allora il controllo, introducendo una catena più piccola che controlla la posizione della valvola confrontandola con un opportuno set point. (P=trasd. posizione, T=trasd. temperatura).

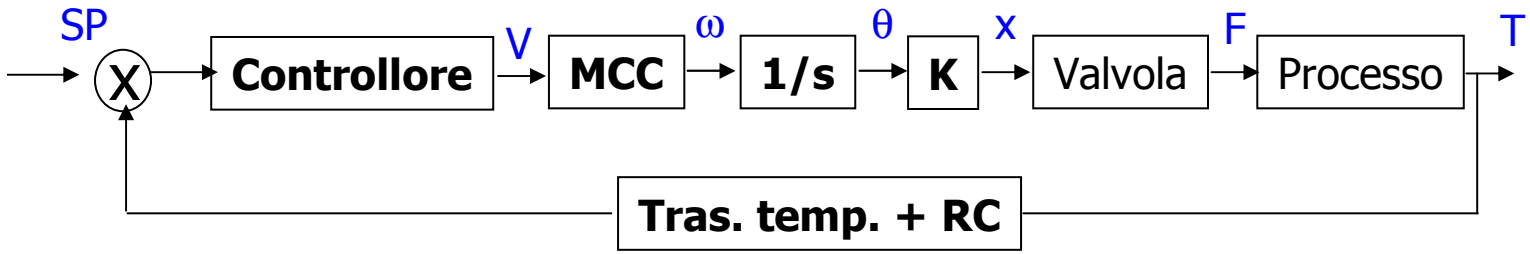
Il vantaggio sta nell'introduzione di un regolatore ad anello chiuso che sostituisce ad un integrale puro un integratore approssimato, in cui possiamo rendere piccola a piacere la costante di tempo in modo che SP=PV immediatamente.

Il controllo di velocità si è ridotto ad un controllo che non abbisogna più del calcolo di un integrale (un polo in meno).

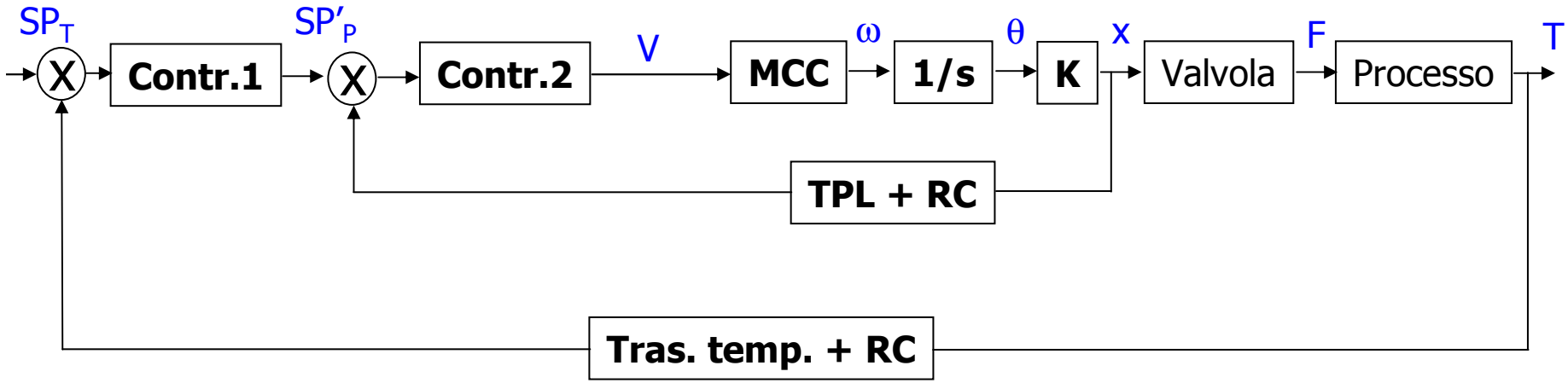
Tecnica di facile progettazione ed indipendente da condizioni ambientali ma applicabile solo all'attuatore (in questo caso motore + valvola) non al processo.

CONTROLLO IN CASCATA

Passiamo da una situazione così, con diversi poli e un anello potenzialmente instabile:



Ad una così, in cui i poli del motore e dell'integrazione ω-x non influenzano più l'anello esterno perché regolati tramite l'anello interno



FEED-FORWARD

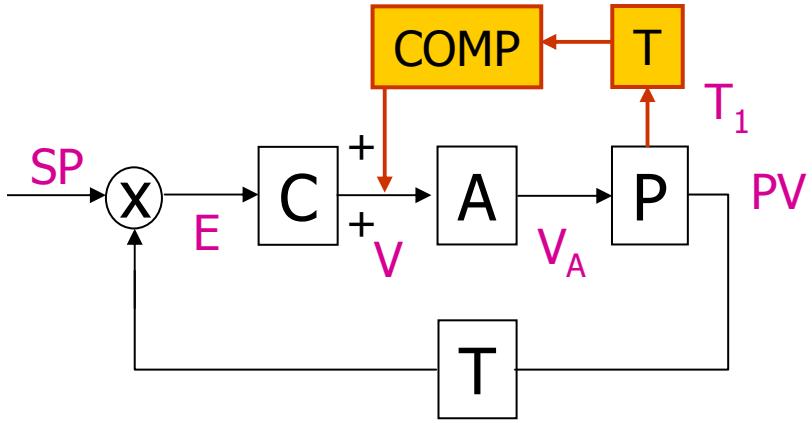
PV segue bene il set-point. Possono intervenire fattori di disturbo, estranei al processo.

Ad es. la T misurata dipende dal vapore immesso e quindi sia dalla temperatura dello scambiatore sia da quella (T_1) che ha il vapore (o anche il liquido) quando viene immesso.

Inoltre, anche la portata permette uno scambio più o meno intenso di calore nella serpentina.

Se questi 2 fattori cambiano (ma anche uno solo), il processo reagirà (lentamente) mutando la temperatura, ma il controllore agirà su queste variazioni con ulteriore RITARDO (solo quando la PV *misurata* si è scostata da SP). Non sempre accettabile.

L'effetto di questi fattori di disturbo può essere sia di tipo addittivo che moltiplicativo e la PV può anche dipendere da un effetto complessivo dei due.



Attraverso ipotesi sul processo (dipendenza T_{uscita} da T_1 e portata) costruiamo un cammino parallelo e complementare a quello del controllo in modo da 'compensare' eventuali variazioni.

Questo cammino è detto *catena feed-forward*.

FEED-FORWARD per variaz. temperatura di ingresso

In generale $PV=\alpha T_1+\beta V_A$ $V_A=f_A[V+FF*T_1]$

con f_A, f.d.t attuatore, e FF f.d.t blocco trasduttore-compensatore

Sostituendo

Contributo feed-forward

$$PV= \beta f_A V+[\alpha+FF*\beta f_A]\ T_1$$

Eliminare la dipendenza di PV significa azzerare [...] cioè porre $FF=-\alpha/\beta f_A$

FF è costante? Per rispondere, è necessario assicurare anche la contemporaneità dell'azione su PV da parte di T_1 rispetto al controllore principale. Nella maggior parte dei casi questo accade, per cui si può dire che FF è costante.

In caso contrario FF, dipende dalla frequenza e anticipa o ritarda a seconda che i due cammini siano in fase o meno.

$$FF = \frac{1+s\tau_1}{1+s\tau_2}$$

In anticipo o ritardo a seconda che $\tau_1>\tau_2$ o meno.

In questo caso si parla di *feed-forward dinamico*, in contrapposizione con il precedente detto *statico* (FF costante).

FEED-FORWARD per variazioni portata in ingresso

Bilancio di potenza termica nello scambiatore:

$$W_E + FT_1C_t = FTC_t$$

Da cui:

$$T = T_1 + W_E / C_t F$$

W_E = potenza termica entrante (vapore)

F = portata liquido in ingresso

C_t = capacità termica

FT_1C_t = potenza termica riscaldante del liquido

FTC_t = potenza termica liquido risultante

Quest'influenza può essere corretta sommando un termine - $W_E / C_t F$ all'uscita del controllore: siccome però il termine di disturbo dipende dalla variazione della portata e della potenza d'ingresso (disturbo moltiplicativo), la compensazione non si può fare in questi termini.

Supponendo piccole variazioni, però, sì: evidenziando un legame lineare tra portata e T

$$T = \frac{W_E}{C_T F_{nom}}\left[1 - \frac{F - F_{nom}}{F_{nom}}\right] + T_1 \approx \frac{W_E}{C_T F_{nom}} + T_1$$

costante

se $F - F_{nom}$ piccolo

FEED-FORWARD - risposta in frequenza

Il modello precedente descrive il comportamento a regime. La f.d.t. si calcola, invece, considerando i termini variabili nel tempo. Ad es. non tutto il calore che entra viene subito restituito: lo scambiatore ne 'immagazzina' una certa quantità per cui la potenza netta entrante è $W_E - W_n$

$$W_E + FT_1C_t = FT_2C_t + W_n$$

$T_P=T_2$ perché la temperatura del processo è quella del liquido uscente= Q/MC_T (Q=calore, M=massa liquido, C_T= capacità termica

$$T_2 = T_P = \frac{Q}{MC_T} = \frac{\int W_n dt}{MC_T} = \frac{W_E + FC_T(T_1 - T_2)}{sMC_T}$$

$$sMC_T T_2 = W_E + FC_T(T_1 - T_2) \quad \text{da cui}$$

N.B. $\mathbf{Q = \int W_n dt}$

$$T_2 = \frac{W_E + FC_T T_1}{sMC_T + FC_T} = \frac{T_1 + \frac{W_E}{FC_T}}{1 + \frac{sM}{F}}$$

Per s→0 si ottiene il risultato già visto

FEED-FORWARD - risposta in frequenza

Quella precedente è un'espressione del tipo $\frac{k}{1+s\tau}$ $\quad \text{con } k = \frac{W_E}{FC_T} + T_1 \quad \text{e} \quad \tau = \frac{M}{F}$

La costante di tempo rende ragione del fatto che > è il flusso entrante + velocemente il sistema risponde, > è la massa del liquido, + tempo ci si impiega a riscaldarlo.

Un ulteriore raffinamento del modello può essere costituito dall'introduzione dei ritardi dovuti ai 2 tubi di flusso e di deflusso (misura della temperatura non esattamente all'ingresso ed all'uscita). Infine c'è un ulteriore ritardo tra la variazione di temperatura all'interno del riscaldatore e l'effettiva sua misura in uscita.

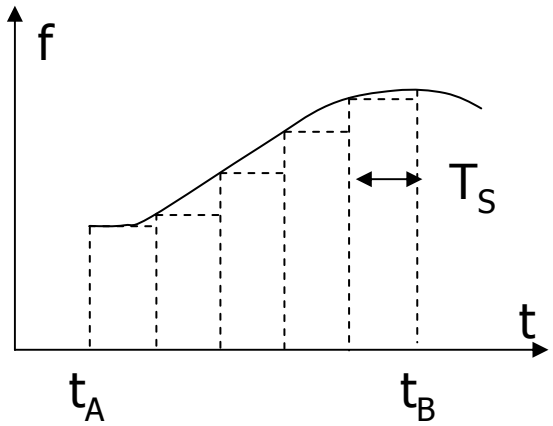
$$T_2 = \frac{T_1 e^{-s(\tau_1+\tau_2)} + \frac{W_E}{FC_T} e^{-s\tau_2}}{1 + \frac{sM}{F}}$$

CONTROLLORI DI TIPO NUMERICO

Elaborazione più raffinata del segnale campionato a frequenza sufficientemente alta.

Consentono di variare i parametri dell'algoritmo di controllo, sulla base delle reali condizioni del processo, con velocità > a quella ottenibile con un controllore analogico.

Il problema è tanto più sentito quanto più complessa è l'elaborazione da realizzare su una variabile (es. integrazione o derivazione) e se questa entra nel processo di controllo.



$$I_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} f(t)dt \cong \sum_{a}^{b-1} f_i T_S$$

approssimazione tanto migliore quanto è < T_S o T_S*f_{max}

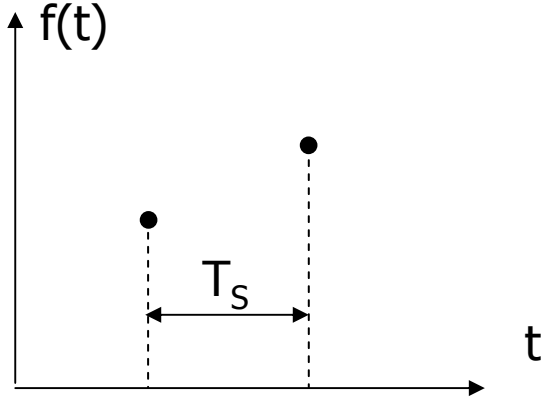
Un approccio apparentemente migliore potrebbe consistere nell'interpolare la curva con rette passanti per i punti di campionamento:

$$I_{ab}' = \sum_{a}^{b-1} \frac{f_{i+1} + f_i}{2} T_s = \sum_{a}^{b-1} \frac{f_{i+1}}{2} T_s + \sum_{a}^{b-1} \frac{f_i}{2} T_s =$$

≈ alla precedente se f_B=f_A o T_S piccolo

$$\Leftarrow \sum_{a}^{b-1} \frac{f_i}{2} T_s + \frac{1}{2} f_B T_s - \frac{1}{2} f_A T_s + \sum_{a}^{b-1} \frac{f_i}{2} T_s = I_{ab} + \frac{T_s}{2}(f_B - f_A)$$

DERIVAZIONE NUMERICA

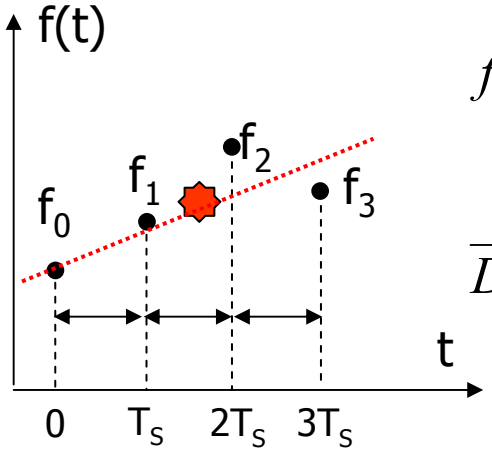


$$f'(t) = \frac{f_{i+1} - f_i}{T_s}$$

$$f'(t) = \frac{f_{i+2} - f_i}{2\,T_s}$$

Se T_s è piccolo può esaltare le componenti di errore presenti sui campioni. Può essere meglio considerare campioni distanziati (minor frequenza).

Si può ricorrere a tecniche più sofisticate, identificando un *centro* nell'insieme dei punti



$$f_m = \frac{f_0 + f_1 + f_2 + f_3}{4} \qquad t_m = \frac{6T_s}{4} = \frac{3T_s}{2}$$

$$\overline{D} = \frac{1}{4}\left[\frac{f_m - f_0}{\frac{3}{2}T_S} + \frac{f_m - f_1}{\frac{1}{2}T_S} + \frac{f_2 - f_m}{\frac{1}{2}T_S} + \frac{f_3 - f_m}{\frac{3}{2}T_S}\right] = \frac{f_3 + 3f_2 - 3f_1 - f_0}{6T_S}$$

Necessita avere più punti e il calcolo comporta un ritardo di $3/2T_s$ (derivata non disponibile ad ogni T_s). Limiti in velocità.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1) Ridursi ad un rapporto tra polinomi in s privo di ritardi puri. $\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{A(s)}{B(s)}$

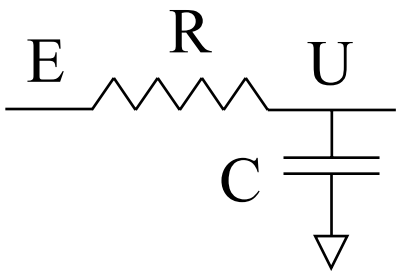
2) Sostituire i termini del tipo sE_n con il corrispondente rapporto incrementale.

3) Sostituire i termini del tipo s^2E_n con il corrispondente rapporto incrementale.

$$\frac{\frac{E_n - E_{n-1}}{T_S} - \frac{E_{n-1} - E_{n-2}}{T_S}}{T_S} = \frac{E_n - 2E_{n-1} + E_{n-2}}{T_S^2}$$

4) La derivazione si riduce ad operazioni ricorsive sulla E nei vari istanti. L'equazione U/E si traduce in una relazione lineare tra diversi campioni dell'ingresso e dell'uscita. Inizialmente si possono fissare valori nulli per E_n, ottenendo valori di U non corretti che poi finiranno per convergere.

FILTRO RC - IMPLEMENTAZIONE NUMERICA



$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{1+s\tau} \qquad \text{da cui } U + s\tau U = E$$

che in forma numerica può essere scritta

$$U_n + \tau \frac{U_n - U_{n-1}}{T_S} = E_n \qquad U_n = \frac{E_n + U_{n-1}\,\tau/T_S}{1+\tau/T_S} = U_{n-1} + \frac{E_n - U_{n-1}}{1+\tau/T_S}$$

- $K=(1+\tau/T_S)^{-1}<1$ non provoca overflow e può essere calcolato una volta per tutte
- a volte invece si può cambiare la frequenza di campionatura
- necessità di un buffer di memoria per conservare K e le uscite via via filtrate

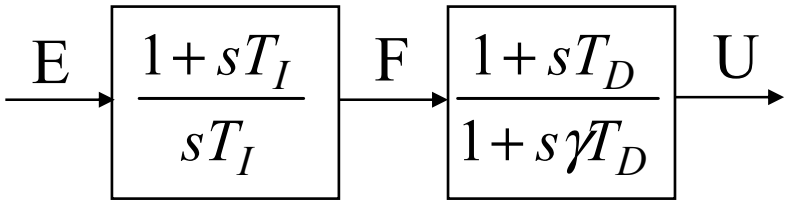
CONTROLLORE PID INTERATTIVO

Consideriamo l'espressione del PID in forma interattiva:

$$\frac{U}{E} = \frac{k(1+sT_I)(1+sT_D)}{sT_I(1+\gamma sT_D)} \qquad \textbf{dove } \gamma T_D = T_F$$

Obiettivo: riduzione guadagno in alta frequenza ($1/\gamma$)

Costruzione PID come cascata di blocchi, ciascuno con un solo polo/zero :



$$\frac{U}{F} = \frac{1+sT_D}{1+\gamma sT_D} \qquad F + sT_D F = U + sT_D U\gamma$$

Discretizzando: $$U_n + \gamma T_D \frac{U_n - U_{n-1}}{T_S} = F_n + T_D \frac{F_n - F_{n-1}}{T_S}$$

O anche: $$U_n = \frac{\gamma \frac{T_D}{T_S} U_{n-1} + F_n\left(1+\frac{T_D}{T_S}\right) - F_{n-1}\frac{T_D}{T_S}}{1+\gamma\frac{T_D}{T_S}}$$

Come variano questi termini (possibilità di overflow o meno con interi a 8/16 bit) ?

CONTROLLORE PID INTERATTIVO - 2

- ($\gamma T_D/T_S$ / ($1+\gamma T_D/T_S$)) = il primo coefficiente, è <1. Non causa overflow.
- $T_F<T_D \Rightarrow \gamma<1$, quindi $T_D>\gamma T_D>>T_S$, e $(1+T_D/T_S)>>1$. Il II° e il III° coeff. possono causare overflow. ($\gamma T_D>>T_S$ per Nyqvist)
- Analogo discorso vale per il coefficiente di F_{n-1}

Una modifica fattibile potrebbe consistere nello scrivere:

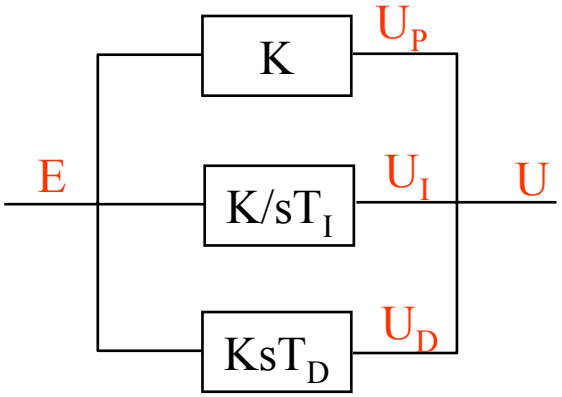
$$U_n = \frac{\gamma \frac{T_D}{T_S} U_{n-1} + F_n + \left(F_n - F_{n-1}\right)\frac{T_D}{T_S}}{1+\gamma\frac{T_D}{T_S}}$$

Però in questo caso il coeff. di (F_n-F_{n-1}) è ~ $1/\gamma$ >1. Tuttavia se F è lento la differenza tra 2 suoi valori può essere molto piccola e quindi il termine può non provocare overflow.

CONTROLLORE PID NON INTERATTIVO

$$\frac{U}{E} = k\left[1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right]$$

Trascuriamo il termine di filtro. Costruiamo una serie di blocchi, evitando così il ricorso a derivate seconde perché ciascuno contiene un polo od uno zero.



$$U_{Pn} = KE_n$$

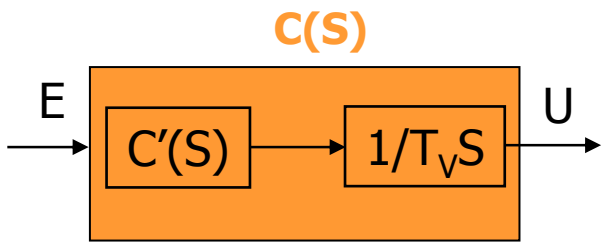
$$sT_I U_{In} = kE_n$$

$$\frac{T_I}{T_S}\left(U_{In} - U_{In-1}\right) = kE_n \quad da\ cui\ \ U_{In} = U_{In-1} + \frac{kT_S}{T_I}E_n$$

$$U_{Dn} = \frac{kT_D}{T_S}\left(E_n - E_{n-1}\right)$$

Il termine di filtraggio può essere poi inserito sul derivatore o direttamente in cascata a tutto il PID.

CONTROLLO DI VELOCITÀ



Situazioni in cui il controllore C(s) è 'spezzabile' in due blocchi di cui uno ha sempre la caratteristica di un integratore.

Quindi C'(s)= T_VSC(s) in questo senso si parla di velocità. Per realizzare la f(controllo) voluta se ne effettua prima la derivata. Poi si integra il risultato (E= errore , U= V_m).

Ad esempio nel controllo dell'apertura di una valvola in cui il motore agisce sulla velocità di apertura della valvola, ma per passare da essa alla posizione è necessario integrare.

•Vantaggio in caso di forti variazioni (es. all'accensione) della variabile manipolata: il fatto che essa venga integrata prima di agire sul processo, rende queste variazioni meno violente (controllo bumpless).

•Un altro vantaggio è di tipo numerico:

$$U_{In} = U_{In-1} + \frac{kT_S}{T_I} E_n$$

U si somma ad un nuovo contributo in ingresso ogni T_s secondi. Questa somma può portare ad un overflow. Separando il termine di tipo integrale, che potrà essere controllato da solo, il μP calcola solo C'(s) evitando la saturazione.

CONTROLLO DI VELOCITA' - 2

Ad es. applicando lo stesso principio all'espressione di un PID non interattivo (e senza filtro)

$$\frac{U'}{E} = \underbrace{kT_V s\left[1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right]}_{C'(s)} = kT_V s + k\frac{T_V}{T_I} + ks^2 T_V T_D$$

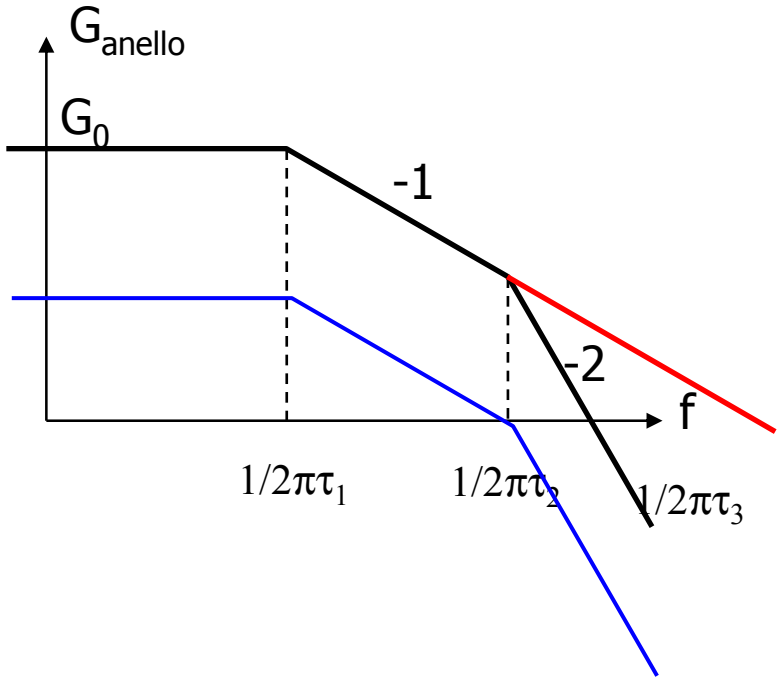
È scomparso il termine integrale. Abbiamo però introdotto un termine derivativo.

Discretizzando:

$$U'_n = kT_V \frac{E_n - E_{n-1}}{T_S} + \frac{kT_V}{T_I} E_n + \frac{kT_V T_D}{T_S^2}\left[E_n - 2E_{n-1} + E_{n-2}\right]$$

U'_n andrà in ingresso o ad un attuatore di tipo integrativo o a un blocco che esegua l'integrazione, facendo attenzione all'overflow.

COMPENSAZIONE DINAMICA



$$\frac{G_0}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

Possibile instabilità con 2 poli. Soluzioni:

- abbassare il guadagno per attraversare 0 db con pendenza inferiore;
- rete anticipatrice di fase (sviluppata in forma numerica). $(1+s\tau_2)/(1+s\tau_3)$ con $\tau_2>\tau_3$.

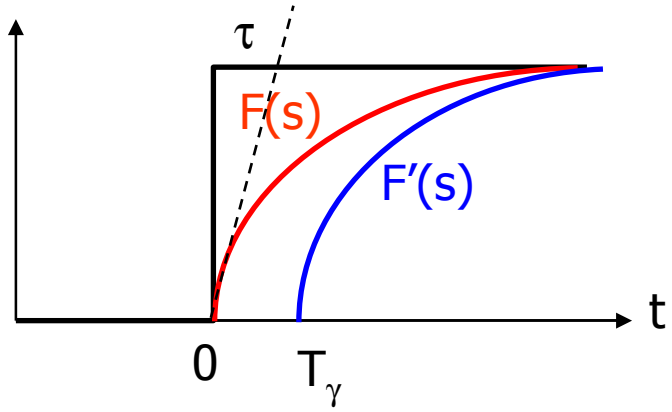
L'introduzione di una rete con f.d.t polo-zero prende il nome di *compensazione dinamica* e la sua realizzazione in forma numerica è del tutto simile a quella vista per il termine derivativo del controllore PID.

COMPENSAZIONE RITARDO PURO

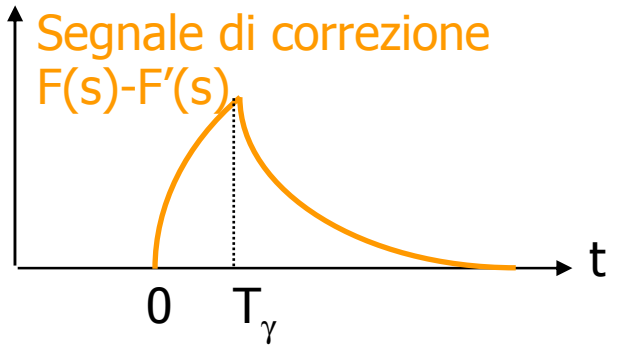
Un ritardo di per sé corrisponde ad uno sfasamento di un segnale: se però allo sfasamento si aggiunge un'attenuazione possono nascere problemi.

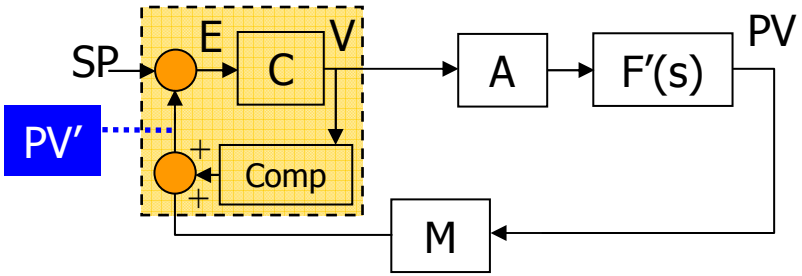
Inoltre, un ritardo puro può provocare da solo l'attraversamento dell'asse a 0 db con sfasamento superiore a 180°, compromettendo la stabilità del sistema.

Applicando per esempio un ingresso a gradino, la risposta può giungere troppo tardi.



$$F'(s) = \frac{e^{-sT_\gamma}}{(1+s\tau)}$$

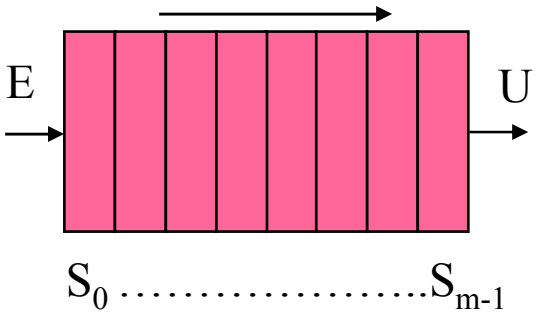




$$PV'(s) = \frac{V}{(1+s\tau)} \quad \Rightarrow \quad Comp. = \frac{1-e^{-sT_\gamma}}{(1+s\tau)}$$

PREDITTORE SMITH

La rete di compensazione può essere realizzata tramite un buffer di memoria RAM in logica FIFO, che funziona come uno shift register.



$S_{m-1} \rightarrow U$

$S_{m-2} \rightarrow S_{m-1}$

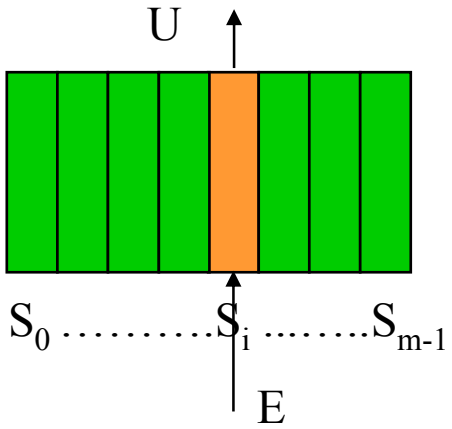
.

.

$S_0 \rightarrow S_1$

$E \rightarrow S_0$

L'uscita all'istante n è uguale all'ingresso all'istante t_{n-m}. Il ritardo è $T=mT_s$. Soluzione complessa se n° dati è grosso.



$S_i \rightarrow U$

$E \rightarrow S_i$

$i+1 \rightarrow i$ per $i+1<m$

$0 \rightarrow i$ per $i+1=m$

Un'altra soluzione prevede l'uso di un puntatore mobile all'i-sima cella: ciò comporta un n° molto inferiore di operazioni indipendentemente dal ritardo che si vuole generare.

Problema se necessita un ritardo molto lungo, alto n° di celle di memoria utilizzate.

PREDITTORE SMITH

Si possono allora usare m circuiti RC in cascata, per ottenere un ritardo complessivo pari alla somma dei ritardi di ciascun stadio.

$$\frac{1}{(1+s\tau_1)}\frac{1}{(1+s\tau_2)}\cdots\frac{1}{(1+s\tau_m)} \rightarrow \mathbf{T}=\sum_{1}^{m}\tau_i$$

Si noti infatti che:

$$e^{-sT}=\frac{1}{e^{sT}}\cong\frac{1}{1+sT+\frac{(sT)^2}{2}}\cong\frac{1}{1+sT+\frac{(sT)^2}{4}}=\frac{1}{\left(1+\frac{sT}{2}\right)^2}$$

facilmente implementabile anche per via numerica (minor occupazione di memoria)

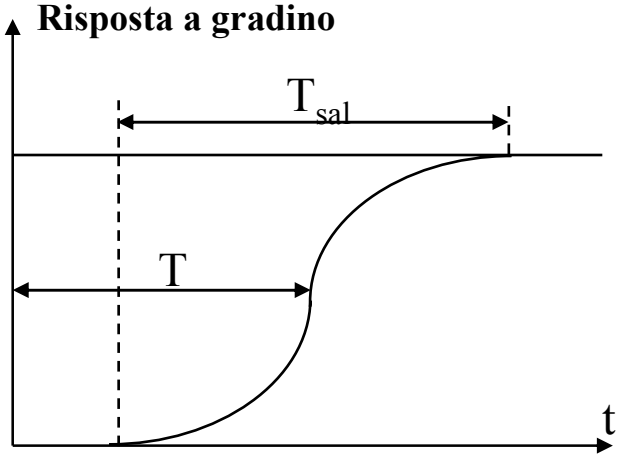
E più in generale:

$$e^{-sT}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{sT}{m}\right)^m}$$

Assumendo che T sia il tempo in cui la curva supera il 50% del valore di regime, si dimostra, supponendo che tutti gli stadi abbiano stesso ritardo τ_0, che

$$T_{sal}=\tau_0\sqrt{m}=\frac{T}{\sqrt{m}}$$

all'aumentare di m tende a un ritardo puro

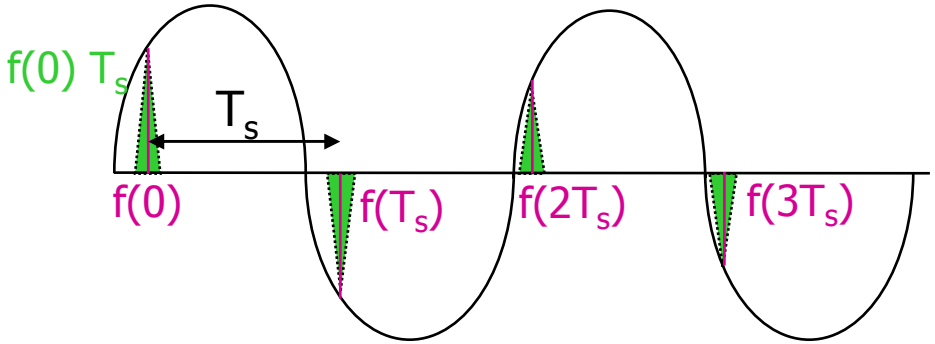


TECNICHE NUMERICHE PER LA ELABORAZIONE

I segnali sono noti in istanti discreti di tempo (campionamento) $\Rightarrow$ trasformata zeta.

La si può introdurre come variante della trasformata di Laplace, considerando il segnale f(t) come una somma di δ di Dirac aventi valore f_n all'istante di campionamento nT_S.

$$f(t) \longrightarrow f^*(t) = \sum_0^\infty f(jT_s)\delta(t - jT_s)T_s$$



Qual è la L-trasf. della funzione campionata?

$$F^*(s) = \int_0^\infty f^*(t)\, e^{-st} dt = \sum_0^\infty \int_0^\infty f(jT_s)\delta(t - jT_s)T_s e^{-st} dt = T_s \sum_0^\infty f(jT_s) e^{-jsT_S} = T_s \sum_0^\infty f_j z^{-j}$$

$$ponendo\ f_j = f(jT_s)\ \ ed\ \ z = e^{sT_s} \qquad \text{e da qui } F^*(s) = T_s F(z)$$

Nell'integrale dipendono da t la δ e l'esponenziale. Il risultato è il valore della funzione integranda (senza δ) calcolato in T_s

Essendo la trasformata zeta a meno di una costante = L-trasf. ne conserva tutte le proprietà

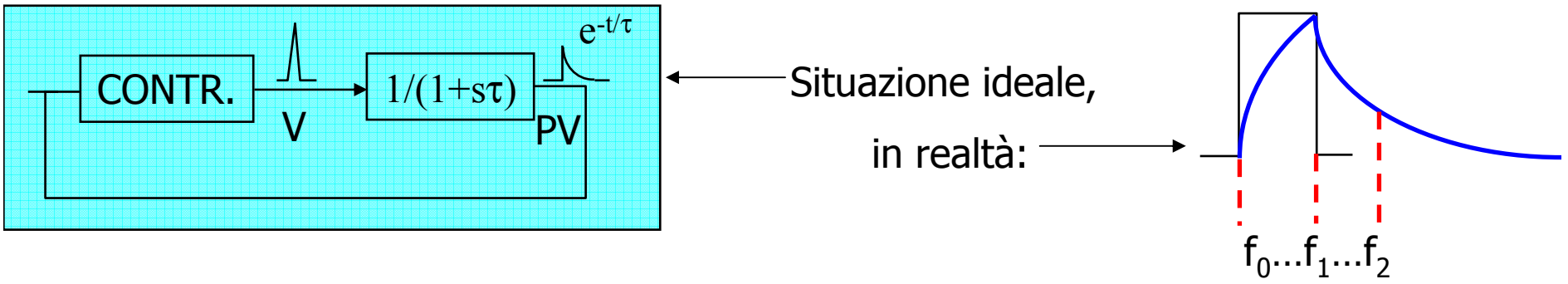
TRASFORMATA ZETA: PROPRIETÀ

LINEARITÀ $h(t)=\alpha f(t)+\beta g(t) \Rightarrow h_n=\alpha f_n+\beta g_n \Rightarrow H(z)=\alpha F(z)+\beta G(z)$

TRASLAZIONE $g(t)=f(t-T)$ con $T=kT_s \Rightarrow G(z)=z^{-k}F(z)$

CONVOLUZIONE $h_J=\Sigma f_{j-i}g_i \Rightarrow H(z)=F(z)*G(z)$

La teoria delle trasformate Z, si basa sul principio che i campioni di un segnale dovrebbero essere equispaziati di un periodo T_S. In pratica il controllore realizza questo mantenendo costante il valore in uscita per un tempo pari a T_S. Ciò significa che nelle espressioni precedenti alle funzioni di Dirac si devono sostituire impulsi.



$f_0=0$, $f_1=e^{-Ts/\tau}$, $f_2=e^{-2Ts/\tau}$ effetto ritardo = Ts introdotto dal controllore

CONTROLLORI OTTIMALI

Ottimalità intesa come portare PV=SP nel minor tempo possibile sia all'accensione sia per effetto di una variazione dell'ingresso per un qualunque motivo.

Attraverso ipotesi ragionevoli sulle caratteristiche del processo (presenza di ritardi ad es.) e mediante tecniche numeriche si vuole sintetizzare il controllore che ci consente di ottenere il miglior controllo possibile. Non sempre ci si riesce.

Supponiamo di conoscere il valore dei campioni di ingresso e uscita al controllore:

$$E(z)=\sum_{0}^{\infty} e_n z^{-n} \qquad V(z)=\sum_{0}^{\infty} v_n z^{-n} \qquad e^{sT_s}=z$$

La più generale espressione del valore in uscita all'istante n è una combinazione lineare dei valori degli ingressi e delle uscite agli istanti precedenti (possiamo farvi ricadere diverse forme di controllo viste in precedenza, tipo PID …):

$$v_n=\sum_{0}^{N} e_{n-j}a_j - \sum_{1}^{M} v_{n-j}b_j$$

e aggiungendo un termine $b_0=1$ si può scrivere

$$0=\sum_{0}^{N} e_{n-j}a_j - \sum_{0}^{M} v_{n-j}b_j$$

CONTROLLORI OTTIMALI - 2

Trasformando si ottiene: $A(z)E(z) - B(z)V(z) = 0 \quad da\ cui \quad V(z) = \frac{A(z)}{B(z)} E(z)$

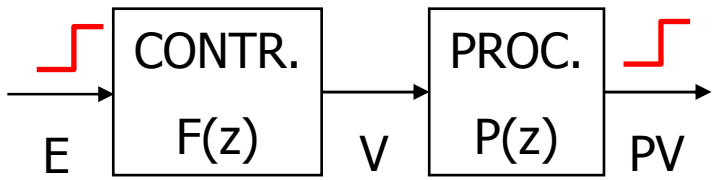
L'unica approssimazione riguarda il fatto che E e V sono continui nel tempo mentre A e B sono discreti. Se, poi, ingresso e uscita relativa sono noti per un certo intervallo di tempo, volendo una rete di controllo con ingresso B ed uscita A non dobbiamo fare nient'altro che calcolare il rapporto dei punti corrispondenti di V(z) e di E(z).

Metodo potente in cui l'unico requisito è che $b_0=1$, ma non è un problema perché basta che il primo campione sia diverso da zero che poi si normalizza rispetto esso.

Il progetto di un controllore ottimale passa quindi attraverso le seguenti fasi:

- identificare ingressi e disturbi;
- identificare l'uscita voluta (ottimale) in corrispondenza agli ingressi identificati;
- determinare gli ingressi che si presentano al controllore e i valori che devono essere prodotti in uscita istante dopo istante;
- identificare la f.d.t del controllore come rapporto tra questi valori: i campioni degli ingressi e delle uscite identificheranno i valori della funzione di controllo ad ogni istante.

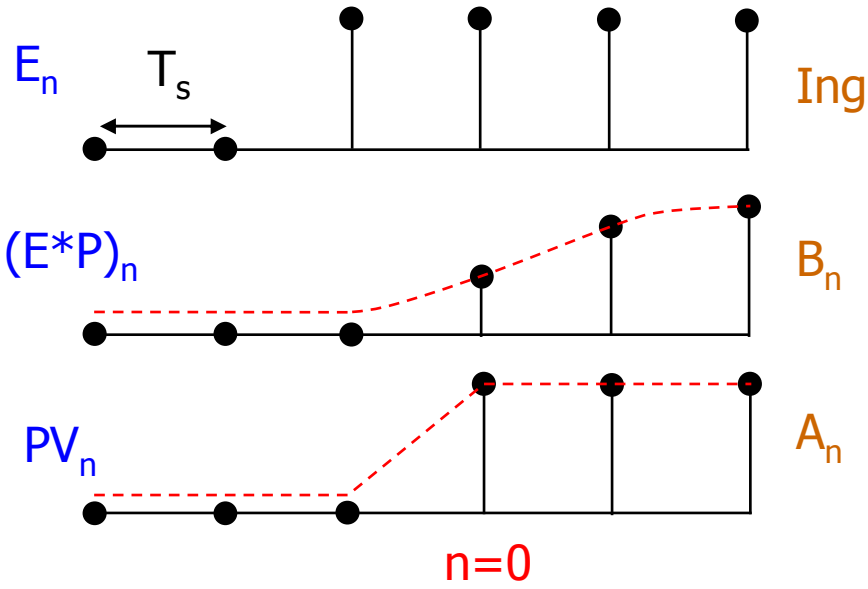
CONTROLLORI OTTIMALI - ESEMPIO



$$F(z) = \frac{PV(z)}{P(z)E(z)} = \ldots = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Vogliamo che ad un gradino della E corrisponda un gradino nella PV. Questo gradino non sarà perfettamente sincrono con l'ingresso ma vi sarà almeno un ritardo T_s dovuto alla Z-trasf. che riteniamo comunque di poter accettare.

Supponendo che il processo abbia una f.d.t del tipo integratore approssimato analizziamo una possibile soluzione grafica:



Possiamo progettare il controllore imponendo che V=PV/P sia l'uscita da avere quando in ingresso c'è E.

Moltiplicando entrambi i termini per P si ottiene PV=V*P.

A questo punto PV=A è noto e (E*P)=B è una convoluzione, facilmente realizzabile nello spazio z, di termini noti.

CONTROLLORI OTTIMALI - ESEMPIO

PV (a_n)	E*P (b_n)	n
1	0.4	0
1	0.7	1
1	0.8	2
1	0.9	3
1	1	4
1	1	5

a'_n	b'_n	n
1	0.4	0
0	0.3	1
0	0.1	2
0	0.1	3
0	0.1	4
0	0.0	5

n	a''_n	$b''_$
0	2.5	1
1	0	0.7
2	0	0.2
3	0	0.2
4	0	0.2
5	0	0

Possibili valori e*p (coefficienti b_j) in corrispondenza a valori di PV (a_j):

Però $b_0 \neq 1$ e n teoricamente $\rightarrow \infty$.

Deriviamo:

$a'_n = a_n - a_{n-1}$ e $b'_n = b_n - b_{n-1}$

Si annullano i coefficienti da n=5 in poi: limitazione della funzione di controllo.

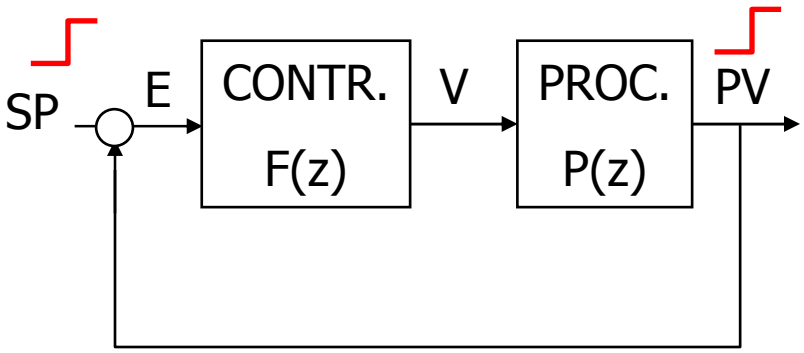
Normalizzazione:

$a''_n = a'_n/0.4$ e

$b''_n = b'_n/0.4$

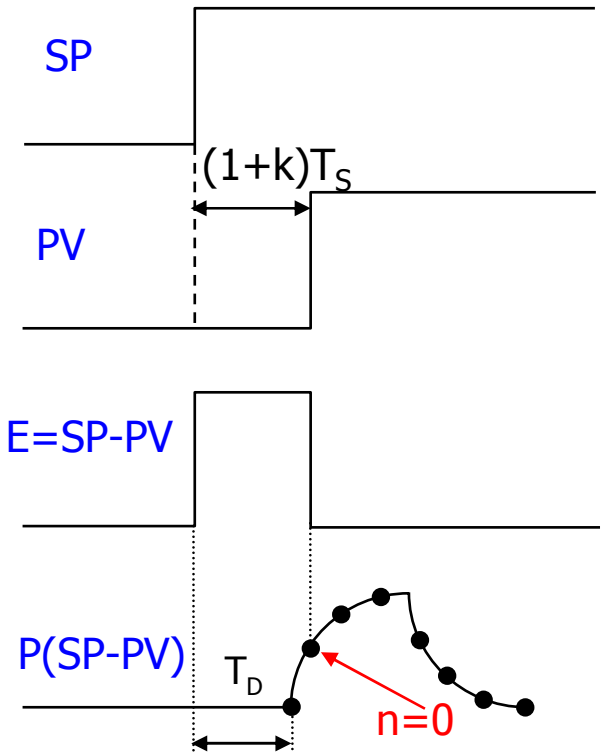
Si ottiene $b_0 = 1$.

CONTROLLORE IN SISTEMA CONTROREAZIONATO



E=SP-PV e supponiamo che $P(z) = \frac{e^{-sT_D}}{1+s\tau}$

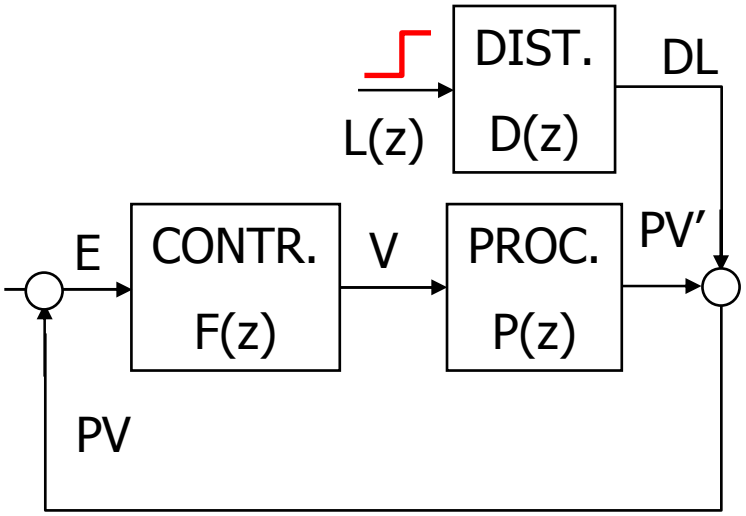
come prima si vuole avere un gradino in uscita in corrispondenza a un gradino in ingresso consapevoli che il ritardo complessivo sarà T_D+T_S o $(1+k)T_s$ se $k=T_D/T_S$.



Si procede come in precedenza con la costruzione di tabelle, i cui valori vengono poi derivati e normalizzati

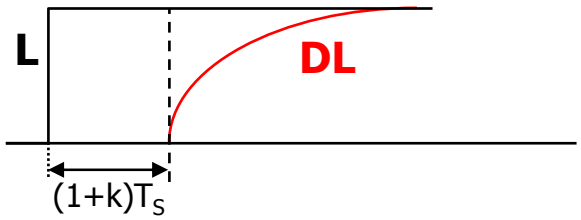
$$F(z) = \frac{PV(z)}{P(z)\left[SP(z) - PV(z)\right]} = \ldots = \frac{A(z)}{B(z)}$$

CONTROLLORE IN SISTEMA CON DISTURBO



Supponiamo che $D(z) = P(z) = \frac{e^{-sT_D}}{1+s\tau}$ e $SP = 0$

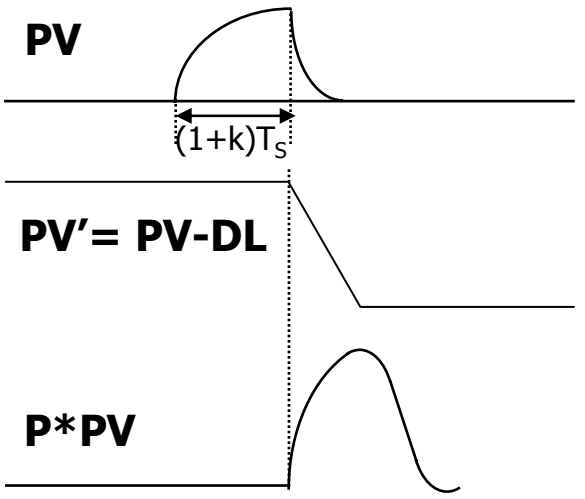
$$F(z) = \frac{V}{E} = \frac{PV'/P}{-PV} = \frac{PV - DL}{-PV \cdot P}$$



Come prima in corrispondenza a disturbo L(z) a gradino, PV diventerà ≠ 0 con ritardo T_D+T_S o $(1+k)T_s$ se $k=T_D/T_S$.

Poiché il processo ha f.d.t uguale al disturbo il controllo (azione su PV che la porta a zero) inizierà ancora dopo $(1+k)T_s$ e quindi dopo $2(1+k)T_s$ da quando si è manifestato il disturbo.

PV' campionato ogni T_s fornisce i coefficienti a_n, mentre P*PV i b_n. Si può così progettare il controllore.



OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

•I controllori ottimali risolvono situazioni complesse a differenza degli algoritmi di controllo classici.

•Il controllore ottimale è diverso a seconda che si presenti un segnale a gradino come disturbo o SP $\Rightarrow$ non è possibile ottimizzare il controllore per più caratteristiche.

•L'ottimizzazione è possibile solo se sono noti i parametri del processo: se questi cambiano di poco, il controllore identificato è ancora utilizzabile. In alternativa si devono progettare algoritmi che valutano i parametri sulla base della risposta che questo dà alle sollecitazioni impresse dall'attuatore aggiustando conseguentemente i parametri dell'algoritmo. Si parla di controllo 'adattivo', sofisticato e dedicato solo a processi di grande interesse economico.